УДК 517.958

СУПЕРВЫЧИСЛЕНИЯ И ДЕКОМПОЗИЦИЯ ГЕТЕРОГЕННОЙ СРЕДЫ МЕТОДОМ ФУНКЦИЙ ВЛИЯНИЯ[1)]

Т.А. СУШКЕВИЧ, С.А. СТРЕЛКОВ, С.В. МАКСАКОВА

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва
E-mail: tamaras@keldysh.ru

SUPERCOMPUTING AND DECOMPOSITION OF THE HETEROGENEOUS MEDIA BY A METHOD OF THE INFLUENCE FUNCTIONS

T.A. SUSHKEVICH, S.A. STRELKOV, S.V. MAKSAKOVA

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow

Аннотация

Цель работы – обратить внимание на класс задач с супервычислениями для экзафлопсных суперкомпьютеров. И не случайно такие самые высокопроизводительные суперкомпьютеры ставят в NASA, а также в центрах исследования климата Земли и космических исследований ЕС, Японии, Китая, Германии и т.д. Характеристики поляризации излучения Земли являются наиболее информативным индикатором состояния и загрязнения атмосферы. Задачи поляриметрии относятся к матричным и для их решения разрабатываются тензорные методы. Предлагается оригинальный подход для декомпозиции "большой" задачи переноса электромагнитного излучения в гетерогенной среде с разными оптическими характеристиками и радиационными режимами, основанный на методе функций влияния краевых задач для кинетических уравнений Больцмана. Распараллеливание вычислений осуществляется путем построения новой математической модели с разбиением "большой" задачи на множество "малых" задач для отдельных подобластей фазового пространства исходной задачи. Для численной реализации такой "гибридной" модели можно использовать сеточные конечно-разностные методы, а также методы Монте-Карло и их комбинации.

Ключевые слова: Супервычисления, математическая модель, декомпозиция гетерогенной среды, метод функций влияния, векторная краевая задача, теория переноса излучения.

Summary

The purpose of the work is to pay attention to the class of problems with supercomputing for ekzaflopsny supercomputers. And not coincidentally, these are the most productive supercomputers put in NASA, as well as in the centers of the studies of the Earth's climate and the space research EU, Japan, China, Germany, etc. Characteristics of polarization of the Earth radiation are the most informative indicator of the atmosphere state and pollution. The polarimetry problems refer to the matrix and for their solutions tensor methods are developed. An original method for the decomposition of the "big" problems of electromagnetic radiation transfer in a heterogeneous media with different optical properties and radiation models, based on the influence functions method of boundary value problems for Boltzmann kinetic equations. Parallelization of calculations carried out through construction of new mathematical models with split "big" problems into many "small" problems for individual sub-regions of the phase space of the original problem. For numerical realization of such "hybrid" model, you can use the grid finite-difference methods and the Monte Carlo methods and their combinations.

Key words: Supercomputing, mathematical model, decomposition of the heterogeneous media, method of the influence functions, a vector boundary value problem, the theory of the radiation transfer.

[1)] Работа поддержана РФФИ (проекты 12-01-00009, 14-01-00197) и проектом 3.5 ОМН ПФИ РАН.

Введение

Посвящается памяти академика Валентина Васильевича Воеводина (22.03.1934—27.01.2007) — известного математика-алгебраиста и одного из советских основоположников параллельных вычислений в год его 80-летия и Ю.М. Баяковского (05.11.1937—17.06.2014), реализовавшего 50 лет назад первую компьютерную графику в СССР, — первого советского члена международного Клуба Пионеров компьютерной графики ACM SIGGRAPH.

В 2014 году отечественное IT-сообщество и специалисты по математическому моделированию, "computer sciences" и космическим исследованиям отмечают важные исторические даты:

— 60 лет назад, в середине февраля 1954 года, в кабинете академика Мстислава Всеволодовича Келдыша — директора Отделения прикладной математики Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР (ОПМ МИАН СССР, н. Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН), что на Миусской пл. в Москве, состоялось ПЕРВОЕ совещание, на котором ВПЕРВЫЕ обсуждался вопрос о создании и запуске в космическое пространство искусственного спутника Земли (ИСЗ); началась работа по созданию космической отрасли [1];

— 60 лет с введения в строй ПЕРВОЙ отечественной серийной ЭВМ "Стрела" в ОПМ МИАН СССР [2, 3], на которой были осуществлены расчеты для запусков первых ИСЗ и полетов космонавтов. С 1947 года в СССР работами по созданию ЭВМ руководил М.В. Келдыш и первая серийная ЭВМ "Стрела" — советская ЭВМ первого поколения — создана под его руководством. В 1954 году разработчики были удостоены Сталинской премии, среди награжденных будущий академик Владимир Константинович Левин — главный конструктор отечественных суперкомпьютеров; главному конструктору Юрию Яковлевичу Базилевскому было присвоено звание Героя Социалистического Труда;

— 50 лет назад в августе 1964 года была введена в строй ПЕРВАЯ отечественная полупроводниковая ЭВМ "Весна" общего назначения [2] для решения "больших" стратегически важных задач с производительностью до 300 тысяч операций-команд в секунду; Главный конструктор — В.С. Полин, заместитель — В.К. Левин. Т.А. Сушкевич пришлось включиться в работы по "математической сдаче" и запуску "первого суперкомпьютера", а в итоге стала одним из первых специалистов по математическому моделированию, когда все этапы решения "большой" задачи выполнялись одним сотрудником и получилась "гремучая смесь" в одном лице "физика-математика-компьютер-космос", которая так и сохранилась на всем пути научной деятельности;

— 50 лет назад в августе 1964 года на ЭВМ "Весна" Ю.М. Баяковским при участии Т.А. Сушкевич ВПЕРВЫЕ реализованы компьютерные графики и анимационный фильм; это был ПЕРВЫЙ в СССР графический интерфейс, причем в интерактивном режиме [4].

1. Математическое моделирование и супервычисления

Двадцатый век в истории земной цивилизации — это век научно-технической революции (НТР), связанной с тремя великими открытиями:
— проникновение в тайны строения вещества и овладение ядерной энергией;
— покорение космического пространства и выход человека в космос;
— изобретение электронно-вычислительных машин и информационных технологий.

Компьютерная революция началась с атомного и космического проектов. Компьютер явился главным действующим лицом, основным двигателем НТР: использование ядерной энергии, полет в космос, информационные технологии, естественно, были бы невозможны без ЭВМ. Впервые для реализации инженерно-конструкторских проектов создания "ракетно-ядерного щита" потребовалось решение больших задач на ЭВМ и были заложены основы новой технологии, которую позже назвали "математическое моделирование" или "computer science". Разработка информационно-математических аспектов этих двух проектов привела к расцвету кинетической теории переноса нейтронов, заряженных частиц, излучения разной природы в широком диапазоне спектра длин волн, лежащей в основе дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ).

50 лет назад в ЖВМ и МФ опубликована первая статья Т.А. Сушкевич по теории переноса излучения [5], в которой были отражены результаты дипломной работы, выполненной на кафедре математики А.Н. Тихонова в МГУ и в "базовой организации" кафедры – Институте Келдыша (в те времена ведущие вузы страны имели "базовые организации"), где с основания института в 1953 году А.Н. Тихонов был заместителем М.В. Келдыша, а Тамара Алексеевна работает в этом институте до настоящего времени, начиная с практики в 1961 году и освоения ЭВМ "Стрела" . Вся научная деятельность Т.А. Сушкевич связана с информационно-математическим обеспечением космических проектов и систем наблюдения Земли на всех поколениях ЭВМ от "Стрелы" до современных суперкомпьютеров.

Первые специалисты по математическому моделированию и "computer sciences" появились в начале 60-х годов 20-го века и были преимущественно выпускниками кафедры математики (зав. кафедрой А.Н. Тихонов) физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (МГУ). А.Н. Тихонов (30.10.1906-07.10.1993) уже имел уникальный опыт по проведению вычислительных экспериментов и решению больших задач в рамках "атомного проекта" [6]. Апофеозом научного творчества дважды Героя Социалистического Труда академика А.Н. Тихонова и одним из наиболее ярких достижений науки 20-го века является создание устойчивого метода решения широких классов обратных и некорректно поставленных задач [7]. В 1966 году за эти работы А.Н.Тихонов был удостоен Ленинской премии. Массовая подготовка "модельеров" связана с именем Героя Социалистического Труда академика А.А. Самарского – ученика и соратника А.Н. Тихонова [8], признанного лидера по вычислительной математике и организатора работ по математическому моделированию. Позже таких специалистов начали готовить в Московском физико-техническом институте (МФТИ). В 1957 году Н.Н. Моисеев стал первым деканом аэромеханического факультета МФТИ, а в 1969 году по его инициативе возник Факультет управления и прикладной математики и Н.Н. Моисеев стал первым его деканом. Затем при содействии А.Н. Тихонова были созданы кафедры в МИФИ и МИЭМ, которыми заведовали ученики А.Н. Тихонова – профессор Б.Л. Рождественский и будущий академик В.П. Маслов.

С появлением "суперкомпьютеров" в конце 20-го века совмещение всех этапов решения "большой" задачи осложнилось тем, что вот уже более 20 лет почти каждые два года появляются новые вычислительные платформы, а вместе с ними и весь набор операционного и программного обеспечения, знание которых стало уделом новых специалистов по использованию суперкомпьютеров и по параллельным вычислениям. Без таких суперспециалистов уже не обходится ни один коллектив, ориентированный на супервычисления. В последние годы наметилась тенденция узкой специализации и в какой-то мере организация "больших" задач стала похожа на 50-60-ые годы, когда было распределение обязанностей в коллективе исполнителей: физики, математики, вычислители-разработчики методов, алгоритмисты, программисты, кодировщики, инженеры и техники... Подготовка вычислителей, алгоритмистов, программистов осуществлялась на кафедре вычислительной математики МГУ им. М.В. Ломоносова, которой руководил С.Л. Соболев, а после его переезда в Новосибирский Академгородок – А.Н. Тихонов.

2. Космос, теория переноса излучения, гетерогенные среды

Космические исследования – это такая область фундаментальных и прикладных исследований, которая с первых шагов освоения космоса не могла развиваться без использования компьютеров. Освоение космоса послужило фажнейшим фактором развития компьютеров и формирования новых научных направлений: математическое моделирование переноса излучения и поля излучения Земли, теория переноса изображений и сигналов, теория видения, теория обработки и анализа данных, средства визуализации и хранения данных и т.д.

Информационное и математическое обеспечение – неотъемлемые компоненты космических проектов. С освоения космоса начались масштабные проекты, в основе которых лежит теория переноса излучения [9-10]. Солнечное электромагнитное излучение – источник радиационного поля Земли, которое является неотъемлемой компонентой среды обитания всего живого и неживого на Земле, с одной стороны, а с другой стороны – это носитель информации. Не случайно самые высокопроизводительные суперкомпьютеры устанавливают в NASA, а также в центрах исследования климата Земли и космических исследований ЕС, Японии, Китая, Германии и т.д.

Наиболее информативным индикатором состояния и загрязнения атмосферы, земной поверхности, океанов являются характеристики поляризации излучения Земли. Степень поляризации в условиях чистой молекулярной атмосферы порядка 70—80%, а при аэрозольных загрязнениях снижается до 2—12%! И не случайно США, Япония, ЕС запускают спутники дистанционного зондирования Земли с поляриметрической аппаратурой. Большие задачи связаны с проблемами "поляризационного контраста" во всевозможных тематических приложениях.

Задачи поляриметрии относятся к матричным и для их решения разрабатываются тензорные методы. Предлагается оригинальный подход для декомпозиции "большой" задачи переноса электромагнитного излучения в гетерогенной среде с разными оптическими характеристиками и радиационными режимами в подобластях системы переноса излучения, основанный на методе функций влияния краевых задач для кинетических уравнений Больцмана. Распараллеливание вычислений осуществляется путем построения новой математической модели с разбиением "большой" задачи на множество "малых" задач для отдельных подобластей фазового пространства исходной задачи. Для численной реализации такой "гибридной" модели можно использовать сеточные конечно-разностные методы, а также методы Монте-Карло и их комбинации.

Рассматриваем перенос поляризованного света в рамках кинетического уравнения и теории переноса излучения [10]. Если уравнения Максвелла были получены в 1873 году, то векторное интегро-дифференциальное уравнение переноса поляризованного излучения было написано только в 40-ые годы XX века. В 1852 г. Джордж Габриэль Стокс (1819-1903 гг.) при исследовании частично поляризованного света для удобства использования в практических целях предложил набор из 4-х параметров, обладающих одинаковой физической размерностью, имеющих размерность интенсивности излучения и позволяющих описать разную природу характеристик состояния поляризации. В SP-представлении (Стокса-Пуанкаре) компоненты вектора-столбца $\mathbf{\Phi} = (I, Q, U, V)^T$ имеют нормировку интенсивности I (поток энергии):

$$Q = Ip\cos 2\chi \cos 2\beta, \; U = Ip\sin 2\chi \cos 2\beta, \; V = Ip\sin 2\beta,$$

χ — азимут плоскости поляризации (угол), β — степень эллиптичности (число), $0 \leqslant p \leqslant 1$ — степень поляризации (отношение).

Распространение поляризованного излучения описывается векторными полями с непредсказуемыми профилями и с особенностями. К тому же компоненты вектора Стокса знакопеременные. В этом принципиальная сложность численного решения поляризационных задач, поскольку требуются детальные описания векторных полей на больших разностных сетках. Задачи теории переноса излучения являются многомерными и полное фазовое пространство содержит шесть переменных: три пространственные координаты, две угловые координаты, описывающие направление распространения излучения, и длина волны из диапазона спектра от ультрафиолета (УФ) до миллиметровых волн (ММВ), содержащего миллионы линий поглощения. Природные среды отличаются пространственными изменениями с такими подобластями, когда нужно применять различные модели и приближения теории переноса излучения.

Предлагается оригинальный универсальный математический аппарат для моделирования переноса оптического излучения с учетом многократного рассеяния и поглощения в многослойных неоднородных гетерогенных природных и искусственных системах с существенно различными радиационными режимами в отдельных областях системы. Для таких задач не применимы широко распространенные методы сложения или удвоения слоев. Гетерогенной является, например, система "свободная атмосфера - многоярусная слоистая облачность - приземный слой атмосферы - океан" или система "мезосфера - стратосфера - тропосферные многоярусные слоистые облака - шлейфы дымов или выбросов загрязнений - земная поверхность".

Подход основан на построении обобщенных решений в форме матричных функционалов, ядрами которых являются векторы функций влияния отдельных слоев системы. В свою очередь, функции влияния рассчитываются по аналитическим формулам или численными методами (например, итерационным методом характеристик с процедурами учета сильной анизотропии рассеяния и ускорения сходимости итераций) как решения первых краевых задач для интегро-дифференциальных кинетических уравнений или их модификаций, или методом Монте-Карло.

Идея нашего подхода состоит в том, что предлагается методическое распараллеливание вычислений методом декомпозиции, когда исходная "большая" задача разбивается на множество "малых" задач для подобластей. Построены нелинейные функционалы для передаточного оператора [10] и определения полного решения исходной задачи.

Для иллюстрации подхода рассмотрим простейшую векторную задачу для гетерогенного и конечного по высоте плоского слоя с отражающей границей. В предположении стационарного состояния среды и постоянства внешнего потока поле квазимонохроматического поляризованного излучения полностью описывается четырехкомпонентным вектором $\mathbf{\Phi}(\mathbf{r}, \mathbf{s})$. Если среда макроскопически оптически изотропна, то полный вектор Стокса $\mathbf{\Phi}$ находится как решение векторной краевой задачи теории переноса поляризованного излучения – векторного кинетического уравнения Больцмана, описывающего многократное рассеяние в приближении бинарных столкновений фотонов с компоненами среды и с учетом поглощения. Эта математическая модель адекватно описывает физический процесс. Теоретические построения и алгоритмы расчета передаточного оператора основываются на теории обобщенных решений, теории интегральных преобразований обобщенных функций, общей теории регулярных возмущений (асимптотический метод) [10]. Подход, разработанный на базе строгих математических основ, называем методом функций влияния (автором является Т.А. Сушкевич [10]). В теории обобщенных решений функция влияния является фундаментальным решением первой краевой задачи – универсальной характеристикой системы переноса излучения, инвариантной относительно конкретных значений и структур источников излучения и параметров отражения границы.

Чтобы представить масштаб задачи и не осложнять восприятие из-за громоздких формул, воспроизводим скалярную краевую задачу для многослойной гетерогенной системы из M слоев:

$$\hat{K}\Phi \;=\; F^{in}, \quad \Phi\,|_{t\downarrow} = \; F_t^{\downarrow}, \quad \Phi\,|_{b\uparrow} = \; \hat{R}_b^{\uparrow}\Phi + F_b^{\uparrow},$$

с краевыми условиями на внутренних границах для $m \;=\; 2\,\mathrm{div}\,M$

$$\Phi\,|_{d\uparrow,m} = \; \varepsilon(\hat{R}_m^{\uparrow}\Phi + \hat{T}_m^{\uparrow}\Phi) + F_{m-1}^{\uparrow}\;,$$

$$\Phi\,|_{d\downarrow,m} = \; \varepsilon(\hat{R}_m^{\downarrow}\Phi + \hat{T}_m^{\downarrow}\Phi) + F_m^{\downarrow}\;,$$

$$F_1^{\downarrow} \;=\; F_t^{\downarrow}\;; \quad F_M^{\uparrow} \;=\; F_b^{\uparrow}\;; \quad d\downarrow, 1 \;=\; t\downarrow; \quad d\uparrow, M+1 \;=\; b\uparrow;$$

интегро-дифференциальный оператор $\hat{K} \;\equiv\; \hat{D} - \hat{S}$; $m \;=\; 1\,\mathrm{div}\,M$ – номер слоя, $m \;=\; 2\,\mathrm{div}\,M$ – внутренние границы раздела слоев; $m = M+1 \Longrightarrow$ bottom; $m = 1 \Longrightarrow$ top.

Решение ищем в виде ряда регулярных возмущений

$$\Phi \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \Phi^{(n)}$$

Операторы отражения $\hat{R}_m^{\uparrow}$, $\hat{R}_m^{\downarrow}$ и пропускания $\hat{T}_m^{\uparrow}$, $\hat{T}_m^{\downarrow}$ определяются через фазовые матрицы рассеяния сред по следующим правилам:

$$[\hat{R}_m^{\uparrow}(\hat{\gamma}_{m-1}^{\uparrow})f_{m-1}^{\downarrow}](h_m, s_{m-1}^{-}) \;=\; \int\limits_{\Omega^+} \hat{\gamma}_{m-1}^{\uparrow}(h_m, s_{m-1}^{+}, s_{m-1}^{-}) f_{m-1}^{\downarrow}(h_m, s_{m-1}^{+})\, ds_{m-1}^{+};$$

$$[\hat{T}_m^{\downarrow}(\hat{\gamma}_m^{\downarrow})f_{m-1}^{\downarrow}](h_m, s_m^{+}) \;=\; \int\limits_{\Omega^+} \hat{\gamma}_m^{\downarrow}(h_m, s_{m-1}^{+}, s_m^{+}) f_{m-1}^{\downarrow}(h_m, s_{m-1}^{+})\, ds_{m-1}^{+};$$

$$[\hat{T}_m^{\uparrow}(\hat{\gamma}_{m-1}^{\uparrow})f_m^{\uparrow}](h_m, s_{m-1}^{-}) \;=\; \int\limits_{\Omega^-} \hat{\gamma}_{m-1}^{\uparrow}(h_m, s_m^{-}, s_{m-1}^{-}) f_m^{\uparrow}(h_m, s_m^{-})\, ds_m^{-};$$

$$[\hat{R}_m^{\downarrow}(\hat{\gamma}_m^{\downarrow})f_m^{\uparrow}](h_m, s_m^{+}) \;=\; \int\limits_{\Omega^-} \hat{\gamma}_m^{\downarrow}(h_m, s_m^{-}, s_m^{+}) f_m^{\uparrow}(h_m, s_m^{-})\, ds_m^{-}.$$

Вводим алгебраические векторы с размерностью $2M$:
n-приближение решения

$$\mathbf{\Phi}^{(n)} = \{\Phi_1^{\downarrow(n)}, \Phi_1^{\uparrow(n)}, \Phi_2^{\downarrow(n)}, \Phi_2^{\uparrow(n)}, \ldots, \Phi_m^{\downarrow(n)}, \Phi_m^{\uparrow(n)}, \ldots, \Phi_M^{\downarrow(n)}, \Phi_M^{\uparrow(n)}\} ;$$

полное решение

$$\mathbf{\Phi} = \{\Phi_1^{\downarrow}, \Phi_1^{\uparrow}, \Phi_2^{\downarrow}, \Phi_2^{\uparrow}, \ldots, \Phi_m^{\downarrow}, \Phi_m^{\uparrow}, \ldots, \Phi_M^{\downarrow}, \Phi_M^{\uparrow}\} ;$$

источники в n-приближении

$$\mathbf{F}^{(n)} = \{F_1^{\downarrow(n)}, F_1^{\uparrow(n)}, F_2^{\downarrow(n)}, F_2^{\uparrow(n)}, \ldots, F_m^{\downarrow(n)}, F_m^{\uparrow(n)}, \ldots, F_M^{\downarrow(n)}, F_M^{\uparrow(n)}\} ;$$

тензор функций влияния слоев

$$\mathbf{\Theta} = \{\Theta_1^{\downarrow}, \Theta_1^{\uparrow}, \Theta_2^{\downarrow}, \Theta_2^{\uparrow}, \ldots, \Theta_m^{\downarrow}, \Theta_m^{\uparrow}, \ldots, \Theta_M^{\downarrow}, \Theta_M^{\uparrow}\} ;$$

начальное приближение источников

$$\mathbf{E} = \{E_1^{\downarrow}, E_1^{\uparrow}, E_2^{\downarrow}, E_2^{\uparrow}, \ldots, E_m^{\downarrow}, E_m^{\uparrow}, \ldots, E_M^{\downarrow}, E_M^{\uparrow}\} ;$$

"сценарий" на границах

$$\mathbf{Z} = \{Z_1^{\downarrow}, Z_1^{\uparrow}, Z_2^{\downarrow}, Z_2^{\uparrow}, \ldots, Z_m^{\downarrow}, Z_m^{\uparrow}, \ldots, Z_M^{\downarrow}, Z_M^{\uparrow}\} .$$

В итоге получаем расщепление исходной задачи на $2M$ задач для отдельных подобластей со своими граничными условиями.

Нулевое приближение — излучение от источников без обмена излучением между слоями: $m = 1 \operatorname{div} M$

$$\hat{K}\Phi_m^{\downarrow(0)} = F_m^{\downarrow in}, \quad \Phi_m^{\downarrow(0)}|_{d\downarrow,m} = F_m^{\downarrow}, \quad \Phi_m^{\downarrow(0)}|_{d\uparrow,m+1} = 0 ;$$

$$\hat{K}\Phi_m^{\uparrow(0)} = F_m^{\uparrow in}, \quad \Phi_m^{\uparrow(0)}|_{d\downarrow,m} = 0, \quad \Phi_m^{\uparrow(0)}|_{d\uparrow,m+1} = F_m^{\uparrow} .$$

Приближения $n \geqslant 1$ — система $2M$ уравнений для $m = 1 \operatorname{div} M$

$$\hat{K}\Phi_m^{\downarrow(n)} = 0, \quad \Phi_m^{\downarrow(n)}|_{d\downarrow,m} = F_m^{\downarrow(n-1)}, \quad \Phi_m^{\downarrow(n)}|_{d\uparrow,m+1} = 0 ;$$

$$\hat{K}\Phi_m^{\uparrow(n)} = 0, \quad \Phi_m^{\uparrow(n)}|_{d\downarrow,m} = 0, \quad \Phi_m^{\uparrow(n)}|_{d\uparrow,m+1} = F_m^{\uparrow(n-1)}$$

с источниками

$$F_1^{\downarrow(n)} = 0 ; \quad F_M^{\uparrow(n)} = \hat{R}_b^{\uparrow}\Phi_M^{\downarrow(n)} + \hat{R}_b^{\uparrow}\Phi_M^{\uparrow(n)} ;$$

$$F_m^{\downarrow(n)} = \hat{T}_m^{\downarrow}\Phi_{m-1}^{\downarrow(n)} + \hat{T}_m^{\downarrow}\Phi_{m-1}^{\uparrow(n)} + \hat{R}_m^{\downarrow}\Phi_m^{\downarrow(n)} + \hat{R}_m^{\downarrow}\Phi_m^{\uparrow(n)} ;$$

$$F_m^{\uparrow(n)} = \hat{R}_{m+1}^{\uparrow}\Phi_m^{\downarrow(n)} + \hat{R}_{m+1}^{\uparrow}\Phi_m^{\uparrow(n)} + \hat{T}_{m+1}^{\uparrow}\Phi_{m+1}^{\downarrow(n)} + \hat{T}_{m+1}^{\uparrow}\Phi_{m+1}^{\uparrow(n)} .$$

Решения находим в виде линейных функционалов для каждого из слоев с $m = 1 \operatorname{div} M$

$$\Phi_m^{\downarrow(n)} = \left(\Theta_m^{\downarrow}, F_m^{\downarrow(n-1)}\right) ; \quad \Phi_m^{\uparrow(n)} = \left(\Theta_m^{\uparrow}, F_m^{\uparrow(n-1)}\right) .$$

Ядра функционалов — функции влияния слоев $m = 1 \operatorname{div} M$ определяются из краевых задач

$$\hat{K}\Theta_m^{\downarrow} = 0, \quad \Theta_m^{\downarrow}|_{d\downarrow,m} = f_{\delta,m}^{\downarrow}, \quad \Theta_m^{\downarrow}|_{d\uparrow,m+1} = 0 ;$$

$$\hat{K}\Theta_m^{\uparrow} = 0, \quad \Theta_m^{\uparrow}|_{d\downarrow,m} = 0, \quad \Theta_m^{\uparrow}|_{d\uparrow,m+1} = f_{\delta,m}^{\uparrow} .$$

В векторной форме n-приближение решения

$$\mathbf{\Phi}^{(n)} = \left(\mathbf{\Theta}, \mathbf{F}^{(n-1)}\right) .$$

Источник в $(n-1)$-приближении

$$\mathbf{F}^{(n-1)} = \hat{P}\mathbf{\Phi}^{(n-1)} .$$

Два последовательных n-приближения связаны рекуррентным соотношением

$$\mathbf{\Phi}^{(n)} = \left(\mathbf{\Theta}, \hat{P}\mathbf{\Phi}^{(n-1)}\right) = \left(\mathbf{\Theta}, \hat{G}^{n-1}\mathbf{E}\right) ,$$

где $\mathbf{E}$ – начальное приближение. Асимптотически точное решение получается в форме векторного линейного функционала – оптического передаточного оператора:

$$\mathbf{\Phi} = (\mathbf{\Theta}, \mathbf{Z}) .$$

"Сценарий" – вектор $\mathbf{Z}$ распределений яркостей на границах

$$\mathbf{Z} \equiv \hat{Z}\mathbf{E} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \hat{G}^n \mathbf{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{P}\mathbf{\Phi}^{(n)}$$

– есть сумма ряда Неймана по кратности прохождения излучения через границы с учетом вклада многократного рассеяния с помощью функций влияния каждого слоя. $\hat{P}$ – матрица ленточного типа с характеристиками отражения и пропускания границ.

Матрично-векторная операция, описывающая один акт взаимодействия излучения с границами и учитывающая многократное рассеяние в слоях через функции влияния

$$\hat{G}\mathbf{F} = \hat{P}(\mathbf{\Theta}, \mathbf{F}) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{R}_2^{\uparrow}(\Theta_1^{\downarrow}, F_1^{\downarrow}) + \hat{R}_2^{\uparrow}(\Theta_1^{\uparrow}, F_1^{\uparrow}) + \hat{T}_2^{\uparrow}(\Theta_2^{\downarrow}, F_2^{\downarrow}) + \hat{T}_2^{\uparrow}(\Theta_2^{\uparrow}, F_2^{\uparrow}) \\ \vdots \\ \hat{T}_m^{\downarrow}(\Theta_{m-1}^{\downarrow}, F_{m-1}^{\downarrow}) + \hat{T}_m^{\downarrow}(\Theta_{m-1}^{\uparrow}, F_{m-1}^{\uparrow}) + \hat{R}_m^{\downarrow}(\Theta_m^{\downarrow}, F_m^{\downarrow}) + \hat{R}_m^{\downarrow}(\Theta_m^{\uparrow}, F_m^{\uparrow}) \\ \hat{R}_{m+1}^{\uparrow}(\Theta_m^{\downarrow}, F_m^{\downarrow}) + \hat{R}_{m+1}^{\uparrow}(\Theta_m^{\uparrow}, F_m^{\uparrow}) + \hat{T}_{m+1}^{\uparrow}(\Theta_{m+1}^{\downarrow}, F_{m+1}^{\downarrow}) + \hat{T}_{m+1}^{\uparrow}(\Theta_{m+1}^{\uparrow}, F_{m+1}^{\uparrow}) \\ \vdots \\ \hat{T}_M^{\downarrow}(\Theta_{M-1}^{\downarrow}, F_{M-1}^{\downarrow}) + \hat{T}_M^{\downarrow}(\Theta_{M-1}^{\uparrow}, F_{M-1}^{\uparrow}) + \hat{R}_M^{\downarrow}(\Theta_M^{\downarrow}, F_M^{\downarrow}) + \hat{R}_M^{\downarrow}(\Theta_M^{\uparrow}, F_M^{\uparrow}) \\ \hat{R}_b^{\uparrow}(\Theta_M^{\downarrow}, F_M^{\downarrow}) + \hat{R}_b^{\uparrow}(\Theta_M^{\uparrow}, F_M^{\uparrow}) \end{bmatrix}$$

В целом решение исходной задачи для гетерогенной системы сводится к трем этапам.

Этап 1. Расчет вектора функций влияния с параметрической зависимостью от направлений и для отдельных слоев как решение задач с внешним мононаправленным потоком (аналог обычных задач для слоя, освещаемого солнечным потоком). Для расчета функций влияния в разных слоях выбираются аналитические или численные методы, которые наиболее адекватно описывает радиационный режим в соответствующих слоях.

Этап 2. Расчет вектора "сценариев" на внутренних и внешних границах системы с помощью матрично-векторной операции.

Этап 3. Расчет угловых и пространственных распределений излучения внутри системы или на её границах через векторный линейный функционал, содержащий вектор "сценариев" на границах и ядром которого является вектор функций влияния.

Представленный метод реализуется с помощью алгоритмов параллельных вычислений угловых и пространственных распределений излучения внутри системы и на ее границах на многопроцессорных компьютерах. Предложены средства автоматизации расчетов и обработки результатов на языке управления сценариями.

Новизна подхода состоит в формулировке новых моделей и новых методов решения многомерных задач теории переноса излучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Езерова Г.Н., Попов Ю.П., Лукичев М.А.** Мстислав Всеволодович Келдыш. 100 лет со дня рождения / ИПМ им.М.В. Келдыша РАН. — Ярославль: ООО Издательство РМП, 2011. — 344 с.
2. **Луховицкая Э.С., Езерова Г.Н.** Информатика в ИПМ им. М.В. Келдыша. 1960-е годы. — М: ИПМ им. М.В. Келдыша, Препринт № 29, 2013. — 33 с. $http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id = 2013-29$.
3. **Кетков Ю.Л.** История развития программного обеспечения. Школа программирования ИПМ им. М.В.Келдыша. $http://www.computer-museum.ru/histsoft/school-keldish-sorucom-2011.htm$.
4. **Баяковский Ю.М., Галактионов В.А.** О некоторых фундаментальных проблемах компьютерной (машинной) графики // Информационные технологии и вычислительные системы. — 2004. — № 4. — Р. 3–24. $http://www.keldysh.ru/pages/cgraph/articles/dep20/comgra.pdf$; $http://www.keldysh.ru/kur/cgraph/IPM-keldisha-Ran-files/history.htm$.
5. **Масленников М.В., Сушкевич Т.А.** Асимптотические свойства решения характеристического уравнения теории переноса излучения в сильно поглощающих средах // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1964. — Т. 4, № 1. — С. 23–34.
6. **Тихонов А.Н.** Собрание научных трудов: в 10 т. / Ред.-сост. Сушкевич Т.А.; РАН. Т. 1 : Математика / Ред.-сост. Сушкевич Т.А., Бутузов В.Ф. — М. : Наука (Классики науки), 2012. — 638 с.
7. **Тихонов А.Н.** Собрание научных трудов: в 10 т. / Ред.-сост. Сушкевич Т.А.; РАН. Т. 3 : Обратные и некорректные задачи / Ред.-сост. Сушкевич Т.А., Денисов А.М. — М. : Наука (Классики науки), 2009. — 630 с.
8. **Сушкевич Т.А.** УЧИТЕЛЬ и УЧЕНИК в совместных публикациях. Академики А.Н.Тихонов (1906-1993) и А.А.Самарский (1919-2008) // В сб.: Александр Андреевич Самарский. Сборник статей, посвященных 90-летию со дня рождения. — М.: Издательство МАКС Пресс, 2014.
9. **Сушкевич Т.А.** Проблемы и перспективы дистанционного зондирования. Посвящается 50-летию начала космической эры // В сб.: Будущее прикладной математики: Лекции для молодых исследователей. Поиски и открытия. Посвящается член-корреспонденту С.П. Курдюмову (1928-2008) и 50-летию открытия космической эры и запуска первого искусственного спутника Земли 04 октября 1957 года / Под ред. Г.Г. Малинецкого. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — С. 31–58.
10. **Сушкевич Т.А.** Математические модели переноса излучения. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. — 661 с.

REFERENCES

1. **Ezerova G.N., Popov Yu.P., Lukichev M.A.** Mstislav Vsevolodovich Keldysh. 100 years since the birth [Mstislav Vsevolodovich Keldysh. 100 let so dnja rozhdenija]/ Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS. – Yaroslavl: Publishing Ltd., 2011. – 344 p. (in Russian)
2. **Lukhovitskaja E.S., Ezerova G.N.** Informatics in Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS. 1960s. [Informatika v cИнформатика в IPM im. M.V. Keldysha. 1960 gody]. – Moscow: Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Preprint № 29, 2013. – 33 p. (in Russian) $http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id = 2013 - 29$.
3. **Ketkov Yu.L.** The history of software development. Programming school of Keldysh Institute. [Istorija razvitija programmnogo obespechenija. Shkola programmirovanija IPM im. M.V. Keldysha]. (in Russian) $http://www.computer - museum.ru/histsoft/school - keldish - sorucom - 2011.htm$.
4. **Bayakovsky Y.M., Galaktionov V.A.** On some fundamental problems of computer (machine) graphics [O nekotorykh fundamental'nykh problemakh komp'yuternoi (mashinnoi) grafiki] // Informatcionnye tekhnologii i vychislitel'nye sistmy. – 2004. – № 4. – P. 3–24. (in Russian) $http://www.keldysh.ru/pages/cgraph/articles/dep20/comgra.pdf$; $http://www.keldysh.ru/kur/cgraph/IPM - keldisha - Ran - files/history.htm$.
5. **Maslennikov M.V., Sushkevich T.A.** Asymptotic properties of the solution of the characteristic equation in the theory of radiation transmission in strongly absorptive media // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 1964. – V. 4, № 1. – P. 29–46.
6. **Tikhonov A.N.** Collection of scientific works: in 10 volumes [Sobranie nauchnykh trudov: v 10 tomakh] / Ed. Sushkevich T.A.; V. 1: Mathematics [Tom 1: Matematika] / Eds. Sushkevich T.A., Butuzov V.F. – Moscow: Nauka (Klassiki nauki), 2012. – 638 p. (in Russian)
7. **Tikhonov A.N.** Collection of scientific works: in 10 volumes [Sobranie nauchnykh trudov: v 10 tomakh] / Ed. Sushkevich T.A.; V. 3 : Inverse and Ill-Posed Problems [Tom 3: Obtarnye i nekorrektnye zadachi] / Eds. Sushkevich T.A., Denisov A.M. – Moscow: Nauka (Klassiki nauki), 2009. – 630 p. (in Russian)
8. **Sushkevich T.A.** TEACHER and PUPIL in joint publications. Academics Tikhonov (1906-1993) and A.A.Samarskii (1919-2008) [UCHITEL' i UCHENIK v sovmestnukh publikatciyakh. Akademiki A.N.Tikhonov (1906-1993) i A.A.Samarskii(1919-2008)] // In: Alexander A. Samarskii. Collection of articles dedicated to the 90th anniversary of his birth. – Moscow: Publishing MAX Press, 2014. (in Russian)
9. **Sushkevich T.A.** Problems and prospects of remote sensing. Dedicated to the 50th anniversary of the space age [Problemy i perspektivy distantcionnogo zondirivaniya. Posvjaschaetsja 50-letiju nachala kosmicheskoi ery] // In: The Future of Applied Mathematics: Lectures for young researchers. Exploration and discovery. Dedicated to the corresponding member S.P.Kurdyumov (1928-2008) and the 50th anniversary of the opening of the space age and the launch of the first artificial earth satellite October, 4, 1957 [V sbornike: Buduschee prikladnoi matamatiki. Kektcii dlja molodykh issledovatelei. Poiski i otkrynija. Posvjaschaetsja chleny-korrespondenty S.P.Kurdyumovu (1928-2008) i 50-letiju otkrytija kosmicheskoi ery i zapuska pervogo iskusstvennogo sputnika Zemli 04 oktjabrja 1957 goda] / Eds. G.F. Malinetskii. Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS. – Moscow: Knizhnyi dom «LIBROKOM», 2009. – P. 31–58. (in Russian)
10. **Sushkevich T.A.** Mathematical models of radiation transfer [Matematicheskie modeli perenosa izluchenija. – Moscow: BINOM. Laboratorija znanii, 2005. – 661 p. (in Russian)